Correction du concours blanc de mathématiques

Analyse

1. La fonction a est quotient de deux fonctions continues sur I dont le dénominateur ne s'annule pas, elle est donc continue sur I. Or $\lim_{x\to 1} a(x) = +\infty$ donc a n'est pas prolongeable par continuité en 1. /1

2. D'après le théorème de la D.E.S, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $a : x \mapsto \frac{\lambda}{1-x} + \frac{\mu}{(1-x)^2}$. Or $(1-x)^2 a(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \mu$ et $(1-x)^2 a(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 1$ donc $\mu = 1$. En évaluant en 0, obtient $\lambda = 1$ donc $a : x \mapsto \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}$ /1

3. Une primitive de a sur I est alors par exemple $A : x \mapsto -\ln(1-x) + \frac{1}{1-x}$. définit sur I. /1

4. L'équation (E) est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre ; le coefficient devant y' ne s'annule pas sur I, on en déduit que les solutions de (E) sur I sont les fonctions définies sur I par $x \longmapsto \lambda e^{A(x)}$ où λ est un réel quelconque . Les solutions de (E) sur I sont donc les fonctions définies sur I par $x \longmapsto \frac{\lambda}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}}$. /1

5. f est $\mathscr{C}^\infty$ sur I comme produit et composée de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur I. D'après la formule de Taylor-Young, la fonction f admet un développement limité en tout point de I et à tout ordre. /1

6.
$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}} &\underset{x\to 0}{=} \left(1 + x + x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)\right) e.e^{x+x^2+x^3+o\left(x^3\right)} \\
&\underset{x\to 0}{=} e\left(1 + x + x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)\right)\left(1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{13}{6}x^3 + o\left(x^3\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} e + 2ex + \frac{7e}{2}x^2 + \frac{17e}{3}x^3 + o\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

ce qui est le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f. /2

7. Soit $E = \{n \in \mathbb{N}$; il existe un polynôme P_n pour lequel $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}\}$

   - $\forall x \in I,\ f^{(0)}(x) = P_0\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}$ pour le polynôme $P_0 = X$, ce qui prouve que $0 \in E$. /1
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, si $n \in E$, alors soit P_n polynôme tel que $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}$; f étant de classe $\mathscr{C}^\infty$, on peut dériver l'expression pour obtenir :

   $$\forall x \in I,\ f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{1}{(1-x)^2} P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) + \frac{1}{(1-x)^2} P_n'\left(\frac{1}{1-x}\right)\right) e^{\frac{1}{1-x}}$$

   Posons donc $P_{n+1} = X^2\left(P_n + P_n'\right)$, P_{n+1} est un polynôme tel que $\forall x \in I,\ f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}$ ce qui démontre que $n+1 \in E$.

   Le théorème de récurrence permet alors de conclure que $E = \mathbb{N}$, et donc que pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n pour lequel $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}$, de plus on a établit la relation : $P_{n+1} = X^2\left(P_n + P_n'\right)$ pour tout entier naturel n. /1

8. On a déjà expliqué $P_0 = X$, et la relation précédente permet de calculer $P_1 = X^3 + X^2$, puis ensuite $P_2 = X^5 + 4X^4 + 2X^3$ et enfin $P_3 = X^7 + 9X^6 + 18X^5 + 6X^4$. /1

9. D'après la question 4, f est une solution de (E) sur I, donc on a

   $$\forall x \in I,\ (1-x)^2 f'(x) = (2-x) f(x)$$

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Dérivons cette expression n fois par la formule de Leibniz, il vient :

   $$\forall x \in I,\ (1-x)^2 f^{(n+1)}(x) - 2n(1-x) f^{(n)}(x) + n(n-1) f^{(n-1)}(x) = (2-x) f^{(n)}(x) - n f^{(n-1)}(x)$$

Multiplions le tout par $\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 e^{-\frac{1}{1-x}}$, et utilisons l'expression des dérivées successives de f obtenue à la question 6, il vient :

$$P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right)-\left((2n+1)\frac{1}{1-x}+\left(\frac{1}{1-x}\right)^2\right)P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)+\frac{n^2}{(1-x)^2}P_{n-1}\left(\frac{1}{1-x}\right)=0$$

Le polynôme P_{n+1} et le polynôme $\left((2n+1)X+X^2\right)P_n-n^2X^2P_{n-1}$ coïncident donc au moins sur $\mathbb{R}_+^*$ (puisque $x\longmapsto\frac{1}{1-x}$ réalise une bijection de I sur $\mathbb{R}_+^*$) donc en une infinité de valeurs, ces polynômes sont donc égaux. Ainsi $P_{n+1}=\left[(2n+1)X+X^2\right]P_n-n^2X^2P_{n-1}$ /2

10. D'après la définition de P_n, on a $a_n=f^{(n)}(0)=P_n(1)\,e$, d'où /1

$$a_{n+1}=((2n+1)+1)\,a_n-n^2a_{n-1},\ \text{i.e. } a_{n+1}=(2n+2)\,a_n-n^2a_{n-1}$$

11. (a) On a calculé P_0,P_1,P_2,P_3, on en déduit $a_0=e,\ a_1=2e,\ a_2=7e$ et $a_3=34e$, puis $a_4=209e$. /1
    (b) f étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ son développement limité à l'ordre 4 en 0 est obtenu par la formule de Taylor Young :

$$f(x)\underset{x\to0}{=}a_0+a_1x+\frac{a_2}{2}x^2+\frac{a_3}{3!}x^3+\frac{a_4}{4!}x^4+o\left(x^4\right)$$

    Tous les calculs ont été faits précédemment : /1

$$f(x)\underset{x\to0}{=}e+2ex+\frac{7e}{2}x^2+\frac{17e}{3}x^3+\frac{209e}{24}x^4+o\left(x^4\right)$$

12. D'après le théorème sur les séries de terme général $\frac{z^n}{n!}$, $\lim\limits_{p\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{p}\frac{1}{i!}=e$. /1

13. (a) D'une part $S_p(0)=\sum\limits_{i=0}^{p}\frac{i!}{(i!)^2}=u_p$.
    D'autre part, pour $i\in\mathbb{N}^*$, $(i+1)!=[(i-1)!]\times i\,(i+1)=i^2\,(i-1)!+i!$, donc $\frac{(i+1)!}{(i!)^2}=\frac{(i-1)!}{((i-1)!)^2}+\frac{1}{i!}$.
    D'où en sommant : /1

$$S_p(1)=1+\sum_{i=1}^{p}\frac{(i+1)!}{(i!)^2}=\left(1+\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{i!}\right)+\sum_{i=1}^{p}\frac{(i-1)!}{((i-1)!)^2}$$

    On en déduit après changement d'indice $j=i-1$ dans la deuxième somme, la relation $S_p(1)=u_p+u_{p-1}$.
    (b) Il en résulte immédiatement d'après la question 12 : $\lim\limits_{p\to+\infty}S_p(0)=e$ et $\lim\limits_{p\to+\infty}S_p(1)=2e$ /1

14. D'abord $S_p(n+1)-(2n+2)\,S_p(n)+n^2S_p(n-1)=\sum\limits_{i=0}^{p}\frac{(n+i+1)!-(2n+2)\,(n+i)!+n^2\,(n+i-1)!}{(i!)^2}$.
    Ensuite, on peut simplifier le terme général de la somme de droite :

$$\begin{aligned}\frac{(n+i+1)!-(2n+2)\,(n+i)!+n^2\,(n+i-1)!}{(i!)^2}&=\frac{(n+i-1)!\left[(n+i+1)\,(n+i)-(2n+2)\,(n+i)+n^2\right]}{(i!)^2}\\&=\frac{(n+i-1)!\,(i^2-i-n)}{(i!)^2}\end{aligned}$$

    D'où pour tout $i\in\mathbb{N}^*$, $\frac{(n+i+1)!-(2n+2)(n+i)!+n^2(n+i-1)!}{(i!)^2}=\frac{(n+i-1)!}{((i-1)!)^2}-\frac{(n+i)!}{(i!)^2}$, et donc en revenant à la somme :

$$\begin{aligned}S_p(n+1)-(2n+2)\,S_p(n)+n^2S_p(n-1)&=-n!+\sum_{i=1}^{p}\frac{(n+i-1)!}{((i-1)!)^2}-\sum_{i=1}^{p}\frac{(n+i)!}{(i!)^2}\\&=\sum_{i=0}^{p-1}\frac{(n+i)!}{(i!)^2}-\sum_{i=0}^{p}\frac{(n+i)!}{(i!)^2}=S_{p-1}(n)-S_p(n)\end{aligned}$$

    On a démontré la relation : $S_p(n+1)-(2n+2)\,S_p(n)+n^2S_p(n-1)=S_{p-1}(n)-S_p(n)$. /2

15. Considérons l'ensemble $E' = \left\{n \in \mathbb{N}\ ;\ (S_p(n))_{p\in\mathbb{N}} \text{ converge}\right\}$
    - On a montré en 13.b) que $0, 1 \in E'$
    - Si un entier naturel non nul n vérifie : $\begin{cases} n-1 \in E' \\ n \in E' \end{cases}$ alors $(S_p(n+1))_{p\in\mathbb{N}}$ étant combinaison linéaire des suites $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_{p-1}(n))_{p\in\mathbb{N}}$ (avec de "vrais" coefficients indépendants de p) on en déduit que $(S_p(n+1))_{p\in\mathbb{N}}$ converge aussi, et donc $n+1 \in E'$.

    Le théorème de récurrence double permet alors de conclure que $E' = \mathbb{N}$ et donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ converge. /1

16. Passons à la limite lorsque $p \to +\infty$ dans la relation établie précédemment :
$$S_p(n+1) - (2n+2)\, S_p(n) + n^2 S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)$$
et appelons b_n la limite de $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ pour chaque entier n, on obtient :
$$b_{n+1} - (2n+2)\, b_n + n^2 b_{n-1} = b_n - b_n = 0$$
et on en déduit que les suites (a_n) et (b_n) vérifient la même relation de récurrence double.
Mais de plus, $b_0 = e = a_0$ et $b_1 = 2e = a_1$; on en déduit que les suites (a_n) et (b_n) sont égales, c'est-à-dire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n = \lim\limits_{p\to+\infty} S_p(n) = \lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{i=0}^{p} \dfrac{(n+i)!}{(i!)^2}$. /2

Probabilités

Partie A - Préliminaires

1. Notons R_i (resp. B_i) l'événement "tirer une boule rouge (resp. blanche) au i-ème tirage."
On a $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ et
$$P(X_1 = 1) = P(B_1) = \frac{b}{b+r} \text{ et } P(X_1 = 0) = P(R_1) = \frac{r}{b+r}$$
car toutes les $b+r$ boules présentes dans l'urne sont équiprobables. Donc $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$. /1

2. • Sachant $\{X_1 = 1\}$, on a tiré une boule blanche au premier tirage, donc, avant le second tirage, l'urne contient $b+1$ boules blanches et r boules rouges équiprobables, donc
$$P_{\{X_1=1\}}(X_2 = 1) = P_{\{X_1=1\}}(B_2) = \frac{b+1}{r+b+1} \text{ et } P_{\{X_1=1\}}(X_2 = 0) = P_{\{X_1=1\}}(R_2) = \frac{r}{r+b+1}.$$
De même, sachant $\{X_1 = 0\}$, on a b boules blanches et $r+1$ boules rouges équiprobables pour le deuxième tirage, donc
$$P_{\{X_1=0\}}(X_2 = 1) = P_{\{X_1=0\}}(B_2) = \frac{b}{r+b+1} \text{ et } P_{\{X_1=0\}}(X_2 = 0) = P_{\{X_1=0\}}(R_2) = \frac{r+1}{r+b+1}.$$
• On a $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$ et, d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(\{X_1 = 0\}, \{X_1 = 1\})$, on a
$$\begin{aligned} P(X_2 = 0) &= P(X_1 = 0)P_{\{X_1=0\}}(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P_{\{X_1=1\}}(X_2 = 0) \\ &= \frac{r}{b+r}\frac{r+1}{b+r+1} + \frac{b}{b+r}\frac{r}{b+r+1} = \frac{r(b+r+1)}{(b+r)(b+r+1)} = \frac{r}{b+r} \end{aligned}$$
et $P(X_2 = 1) = 1 - P(X_2 = 0) = \frac{b}{b+r}$. Donc $X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$. /1

3. • $S_n = b + \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ est égale au nombre de boules présentes dans l'urne au départ auquel on ajoute le nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages. Sachant que chaque fois que l'on tire une boule blanche, on en ajoute globalement une dans l'urne, S_n est égale au nombre de boules blanches présentes initialement auquel on ajoute le nombre de boules blanches ajoutées au cours des n premiers tirages. S_n

représente donc le nombre de boules blanches présentes dans l'urne avant le $(n+1)$-ième tirage.

• Comme, à chaque tirage, il y a au moins 1 boule blanche et une boule rouge dans l'urne, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $X_k(\Omega) = \{0,1\}$.

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)(\Omega) = [\![0,n]\!]$, donc $S_n(\Omega) = [\![b, b+n]\!]$. Cette formule est encore valable pour $n=0$ (car $S_0 = b$), donc est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\boxed{\quad /1}$

Partie B - La loi de X_n

4. Soit $k \in [\![b, n+b]\!]$. Sachant $\{S_n = k\}$, l'urne contient au début du $(n+1)$-ème tirage k boules blanches. Comme, à chaque tirage, on ajoute exactement une boule (que la boule tirée soit blanche ou rouge), l'urne contient en tout, avant le $(n+1)$-ème tirage, $r+b+n$ boules. $\boxed{\quad /1}$

   D'où, comme toutes les boules présentes dans l'urne sont équiprobables,

$$P(X_{n+1} = 1 | S_n = k) = P_{\{S_n=k\}}(B_{n+1}) = \frac{k}{r+b+n}.$$

5. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(S_n = k)_{k \in S_n(\Omega)}$, $\boxed{\quad /1}$

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= \sum_{k=b}^{b+n} P(X_{n+1} = 1 \cap S_n = k) = \sum_{k=b}^{b+n} P(S_n = k) P_{\{S_n=k\}}(X_{n+1} = 1) \\ &= \sum_{k=b}^{b+n} P(S_n = k) \frac{k}{r+b+n} = \frac{1}{r+b+n} \sum_{k=b}^{b+n} k P(S_n = k) = \frac{E(S_n)}{r+b+n}. \end{aligned}$$

6. Montrons par récurrence forte que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, "$X_n \hookrightarrow \frac{b}{b+r}$" (HR_n). $\boxed{\quad /1}$

   Initialisation : Pour $n=1$, d'après la question 1, on a $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{b}{r+b}\right)$, donc on a bien HR_1.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons HR_k vérifiée pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.
   Alors on a $E(X_k) = \frac{b}{b+r}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, donc, par linéarité de l'espérance,

$$E(S_n) = b + \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = b + n\frac{b}{b+r} = \frac{b(b+r+n)}{b+r}.$$

   D'où, $P(X_{n+1} = 1) = \frac{E(S_n)}{r+b+n} = \frac{b(b+r+n)}{b+r}\frac{1}{r+b+n} = \frac{b}{b+r}$, et, comme $X_{n+1}(\Omega) = \{0,1\}$, on a $X_{n+1} \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$.
   On a bien HR_{n+1}.
   Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$.

Partie C - La loi de S_n dans un cas particulier

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a ici $S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} X_k$, donc $\{S_n = 1\} = \left\{\sum_{k=1}^{n} X_k = 0\right\} = \bigcap_{k \in [\![1,n]\!]} \{X_k = 0\}$. $\boxed{\quad /1}$

8. D'après la formule des probabilités composées, $\boxed{\quad /1}$

$$\begin{aligned} P(S_n = 1) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \{X_k = 0\}\right) &= P(X_1 = 0) P_{\{X_1=0\}}(X_2 = 0) \times \cdots \times P_{\{X_1=0\}\cap \ldots \cap\{X_{n-1}=0\}}(X_n = 0) \\ &= P(X_1 = 0) \times \prod_{k=1}^{n-1} P_{\{X_1=0\}\cap\ldots\cap\{X_k=0\}}(X_{k+1} = 0) \\ &= \frac{1}{2} \times \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1+k}{2+k} = \frac{1}{n+1} \quad \text{(par télescopage)} \end{aligned}$$

   $\{S_n = n+1\}$ *signifie que l'on a tiré que des boules blanches. Dans cette partie, les blanches et les rouges ont des rôles complètement symétriques (même nombre au départ et même comportement à chaque tirage), donc, par symétrie (ou en inversant le rôle des blanches et des rouges), on a bien* $P(S_{n+1} = n) = \frac{1}{n+1}$.

9. Soit $(k,\ell) \in [\![1, n+2]\!] \times [\![1, n+1]\!]$.
   - Si $\ell \notin \{k-1, k\}$, alors, comme $(S_{n+1} - S_n)(\Omega) = X_{n+1}(\Omega) = \{0,1\}$, l'événement $(S_{n+1} = k \cap S_n = \ell)$ est impossible donc

$$P(S_{n+1} = k | S_n = \ell) = \frac{P(S_{n+1} = k \cap S_n = \ell)}{P(S_n = \ell)} = \frac{0}{P(S_n = \ell)} = 0.$$

   - Si $\ell = k - 1$ (et donc $k \geqslant 2$), alors

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = k | S_n = \ell) = \frac{P(\{S_{n+1} = k\} \cap \{S_n = k-1\})}{P(S_n = k-1)} &= \frac{P(\{X_{n+1} = 1\} \cap \{S_n = k-1\})}{P(S_n = k-1)} \\ &= \frac{P(S_n = k-1) P_{\{S_n = k-1\}}(X_{n+1} = 1)}{P(S_n = k-1)} \\ &= P_{\{S_n=k-1\}}(X_{n+1} = 1) \underset{Q4}{=} \frac{k-1}{1+1+n} = \frac{k-1}{2+n} \end{aligned}$$

   - Enfin, si $\ell = k$, on a de même,

/1

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = k | S_n = \ell) = \frac{P(\{S_{n+1} = k\} \cap \{S_n = k\})}{P(S_n = k)} &= \frac{P(\{X_{n+1} = 0\} \cap \{S_n = k\})}{P(S_n = k)} \\ &= \frac{P(S_n = k-1) P_{\{S_n = k\}}(X_{n+1} = 0)}{P(S_n = k)} \\ &= P_{\{S_n=k\}}(X_{n+1} = 0) \\ &= 1 - P_{\{S_n=k\}}(X_{n+1} = 1) \\ &\underset{Q4}{=} 1 - \frac{k}{1+1+n} = \frac{2+n-k}{2+n} \end{aligned}$$

10. Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$.

/1

D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(S_n = \ell)_{\ell \in S_n(\Omega)}$, on a :

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = k) &= \sum_{\ell=1}^{n+1} P(S_{n+1} = k \cap S_n = \ell) = \sum_{\ell=1}^{n+1} P(S_n = \ell) P_{\{S_n=\ell\}}(S_{n+1} = k) \\ &= P(S_n = k-1) P_{\{S_n=k-1\}}(S_{n+1} = k) + P(S_n = k) P_{\{S_n=k\}}(S_{n+1} = k) \\ &= P(S_n = k-1) P_{\{S_n=k-1\}}(X_{n+1} = 1) + P(S_n = k) P_{\{S_n=k\}}(X_{n+1} = 0) \\ &= \frac{k-1}{n+2} P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} P(S_n = k). \end{aligned}$$

11. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, "$S_n \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n+1]\!])$" (HR_n).
Initialisation : Pour $n = 0$, $S_0 = 1 \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1,1]\!])$, donc on a bien HR_0.
Pour $n = 1$, on a $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(\frac{1}{2}) = \mathscr{U}([\![0,1]\!])$ d'après la question 1 avec $r = b = 1$.
On a donc $S_1 = 1 + X_1 \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1,2]\!])$. On a bien HR_1.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons HR_n vérifiée.
Alors on a $S_{n+1}(\Omega) = [\![1, n+2]\!]$ (d'après la question 3), $P(S_{n+1} = 1) = \frac{1}{n+2}$ (d'après la question 8), $P(S_{n+1} = n+2) = \frac{1}{n+2}$ (admis dans l'énoncé) et, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = k) &= \frac{k-1}{n+2} P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} P(S_n = k) \\ &= \frac{k-1}{n+2} \frac{1}{n+1} + \frac{n+2-k}{n+2} \frac{1}{n+1} \quad \text{(d'après } HR_n\text{)} \\ &= \frac{n+1}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

On a donc bien $S_{n+1} \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n+2]\!])$, i.e. HR_{n+1}.
Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n+1]\!])$.

/1

Algèbre

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

1. On a $\det(A) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{dev /r} \\ L_1}}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 4 = 8$ donc A est inversible. /1

2. Notons $Q = X^4 - 7X^3 + 18X^2 - 20X + 8$.

   (a) $Q(2) = Q'(2) = Q^{(2)}(2) = 0$ et $Q^{(3)}(2) = -12 \neq 0$. Donc 2 est racine de Q de multiplicité 3. /1

   (b) On a $Q(1) = 0$. Donc $Q = (X-2)^3(X-1)Q_1$ où $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$. Or Q est de degré 4 donc Q_1 est constant. De plus, en analysant les coefficients dominants, on trouve $Q_1 = 1$. D'où $Q = (X-2)^3(X-1)$ s'écrit comme un produit de polynômes réels de degré 1, il est donc scindé sur $\mathbb{R}$. /1

   (c) D'après les relations coefficients-racines, le produit et la somme des racines comptées avec multiplicité doivent être égaux à $-\frac{-7}{1} = 7$ et $\frac{8}{1} = 8$ respectivement. On a bien $2 \times 3 + 1 = 7$ et $2^3 \times 1 = 8$. /1

   (d) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_4) \neq \{0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})}\} \iff A - \lambda I_4 \notin \mathrm{GL}_4(\mathbb{R}) \iff \det(A - \lambda I_4) \iff Q(\lambda) = 0$.
   D'où $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_4) \neq \{0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})}\} \iff \lambda \in \{1; 2\}$. /1

3. On note $E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_4)$.
   $E_1 = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3}}{=} \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{=} \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   D'où $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}), \begin{cases} -y + z = 0 \\ t = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. La famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est libre et génératrice de E_1 donc c'est une base de E_1. /1

4. On note $E_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I_4)$.

   (a) Calculer le rang de $\mathrm{rg}(A - 2I_4) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$. /1

   (b) D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A - 2I_4)) + \mathrm{rg}(A - 2I_4) = \dim(\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}))$.
   D'où $\dim(E_2) = 4 - 2 = 2$.

   (c) On a $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. D'où $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiennent à E_2. La famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires et de cardinal $2 = \dim(E_2)$. C'est donc une base de E_2. /1

5. On a $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = E_2$ donc $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. Par conséquent, $E_1 \oplus E_2$. /1

6. $\dim(E_1)+\dim(E_2)=3\neq\dim(\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}))$ donc E_1 et E_2 ne sont pas supplémentaires dans $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. /1

7. Notons $\mathscr{F}$ la famille de $\mathbb{R}^4$ suivante $((-1,1,1,0),(0,1,1,0),(0,2,1,1),(1,0,0,1))$.

   (a) On a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})=\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\1&1&2&0\\1&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$. Or $\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\1&1&2&0\\1&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1&1&1\\1&0&1&-1\\0&1&-1&0\\0&-1&1&1\end{pmatrix}=I_4$. Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ est inversible, d'où $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})\neq 0$. Par conséquent, la famille $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}^4$. /1

   (b) $P=P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{F}}=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})=\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\1&1&2&0\\1&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$. /1

   (c) $P\begin{pmatrix}-1&-1&1&1\\1&0&1&-1\\0&1&-1&0\\0&-1&1&1\end{pmatrix}=I_4$. D'où $P\in\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1&1&1\\1&0&1&-1\\0&1&-1&0\\0&-1&1&1\end{pmatrix}$. /1

   (d) Soit $v\in\mathbb{R}^4$. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(v)=P_{\mathscr{F}}^{\mathscr{B}}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)=P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$.

   D'où $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}((2,2,1,3))=\begin{pmatrix}-1&-1&1&1\\1&0&1&-1\\0&1&-1&0\\0&-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}$. /1

8. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.

   (a) Soit $x,y,z,t\in\mathbb{R}$, $f(x,y,z,t)=(x-y+z+t,x+y+z+t,x+2z,-y+z+t)$. /1

   (b) On a $f(-1,1,1,0)=(-1,1,1,0)$, $f(0,1,-1,0)=2(0,1,-1,0)$, $f(0,2,1,1)=2(0,2,1,1)$ et $f(1,0,0,1)=(2,2,1,3)=(0,2,1,1)+2(1,0,0,1)$. Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(f)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$. /1

   (c) D'après la formule de changement de base, $A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{F}}\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(f)P_{\mathscr{F}}^{\mathscr{B}}=P\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(f)P^{-1}$. /1

9. On définit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ suivant $p=(f-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})^2$.

   (a)
   - $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p^2)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}((f-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})^4)=(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}))^4=(A-2I_4)^4$.
     Or $A-2I_4=\begin{pmatrix}-1&-1&1&1\\1&-1&1&1\\1&0&0&0\\0&-1&1&1\end{pmatrix}$ d'où $(A-2I_4)^2=\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\1&-1&1&1\\1&-1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ d'où $(A-2I_4)^4=\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\1&-1&1&1\\1&-1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.
     Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p^2)=(A-2I_4)^2=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}((f-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})^2)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$.
     L'application $g\mapsto\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ définie sur les endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ étant injective, l'endomorphisme p vérifie $p^2=p$ donc p est un projecteur. /1
   - $\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(p)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}((f-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})^2)=(\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(f-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}))^2=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.
     Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(p^2)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(p)^2=\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(p)$.
     L'application $g\mapsto\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(g)$ définie sur les endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ étant injective, l'endomorphisme p vérifie $p^2=p$ donc p est un projecteur. /1

   (b) L'endomorphisme p est la projection sur $\mathrm{Ker}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(p)$. Or $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)=\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\1&-1&1&1\\1&-1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, d'où $\mathrm{Ker}(p)=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,x-y+z+t=0\}$ et $\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Vect}((1,1,1,0))$. /1